Métodos Numéricos

1er Cuatrimestre 2023

Recuperatorio 1er Parcial

(10/07/2023)

DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

Nombre y Apellido: [redacted]

Libreta Universitaria: [redacted]

Total de hojas entregadas (sin enunciado): 6

Ej. 1 23	Ej. 2 25	Ej. 3 15	Ej. 4 17	Nota 80

☐ El examen se aprueba con 60 puntos. ☐ Resolver los ejercicios en hojas separadas. ☐ Completar nombre en las hojas. ☐ Completar LU y nombre en el enunciado.	**Justificar todas las respuestas** Puede hacerlo citando resultados de la teórica o la práctica. Para ejercicios de la guía, consulte.

Ejercicio 1 (27 puntos).

a) (10 puntos) Sean $J, K, L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que $J = KL$ y K inversible. Probar que $rg(J) = rg(L)$.

b) Sean $A \in \mathbb{R}^{r\times r}$ inversible, $B \in \mathbb{R}^{r\times n-r}$, $C \in \mathbb{R}^{n-r\times r}$ y $D \in \mathbb{R}^{n-r\times n-r}$ y sea $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

i) (7 puntos) Probar que $rg(M) \geqslant r$.

ii) (10 puntos) Verificar que:

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

y probar que $rg(M) = r$ si y sólo si $D = CA^{-1}B$.

Ejercicio 2 (25 puntos). Considere una descomposición LU de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ donde L tiene unos en la diagonal, y sean $\{a_1^t, \dots, a_n^t\}$ las filas de A y $\{u_1^t, \dots, u_n^t\}$ las filas de U. Si $|l_{i,j}| \leqslant 1 \quad \forall 1 \leqslant i, j \leqslant n$:

a) (10 puntos) Probar que $u_i^t = a_i^t - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^t \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant n$.

b) (10 puntos) Probar por inducción que $||u_i||_1 \leqslant 2^{i-1}||A||_\infty \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant n$.

c) (5 puntos) Probar que $||U||_\infty \leqslant 2^{n-1}||A||_\infty$.

Ejercicio 3 (21 puntos).

Sea A una matriz simétrica definida positiva de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que:

a) (5 puntos) $a_{ii} > 0$ para $1 \leqslant i \leqslant n$. ¿Es A es no singular?

b) (8 puntos) Todas las submatrices principales de A son definidas positivas.

c) (8 puntos) $a_{ij}^2 \leqslant a_{ii}\, a_{jj}$ para todo $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Ejercicio 4 (27 puntos). Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A + I$ es inversible y sea f la siguiente operación sobre estas matrices tal que $f(A) = (I - A)(I + A)^{-1}$. Sabiendo que $f(f(A)) = A$ y que $f(A) + I$ es inversible:

a) (7 puntos) Demostrar que si A es antisimétrica entonces $f(A)$ es ortogonal (**Sugerencia:** Probar que $I - A$ e $I + A$ conmutan). Concluir que si A es ortogonal, entonces $f(A)$ es antisimétrica, por lo que f asocia matrices antisimétricas con ortogonales donde ambas cumplen que $A + I$ es inversible.

b) (10 puntos) Sea H de Householder. Probar que no hay matriz antisimétrica A tal que $f(A) = H$.

c) (10 puntos) Considere las dos matrices de Givens que rotan sobre un ángulo recto en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ e, interpretándolas como matrices ortogonales, indique cuáles son sus matrices antisimétricas asociadas en el sentido del item (a). ¿Ve alguna relación entre ellas?

[redacted]

1) a) $rg(A) = \dim(Im(A))$, además sé por teorema de la dimensión que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\Rightarrow n = \dim(Im(A)) + \dim(Nu(A))$

. Luego, para ver que $rg(J) = rg(L)$, voy a ver que $Nu(J) = Nu(L)$ pues entonces
$n = rg(J) + \dim(Nu(J))$
$\Leftrightarrow rg(J) = n - \dim(Nu(J)) = n - \dim(Nu(L))$
$= rg(L)$

. Pruebo la doble inclusión

$\subseteq$) Sea $x \in Nu(J)$, sé que $Jx = \emptyset$
$\Leftrightarrow KLx = \emptyset$

. Llamo $y = Lx$ y supongo $x \notin Nu(L)$
$\Rightarrow Lx = y \neq \emptyset$
$\therefore KLx = Ky = \emptyset$ Abs! $y \neq \emptyset$ y K es inversible $\therefore Ky \neq \emptyset$ ($Nu(K) = \{\emptyset\}$)

. El absurdo vino de suponer $x \notin Nu(L)$
$\therefore x \in Nu(L)$

$\supseteq$) Sea $x \in Nu(L)$, sé que $Lx = \emptyset$

$Jx = K\underbrace{Lx}_{=\emptyset} = K.\emptyset = \emptyset$

$\therefore x \in Nu(J)$

. Concluyo que $Nu(J) = Nu(L)$ y entonces $rg(J) = rg(L)$

b) i) Sé que $rg(M) = \#$ Columnas l.i de M.

. Considero las primeras r columnas de M: $m_1, \dots, m_r$

$$m_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \dots m_r = \begin{pmatrix} a_r \\ c_r \end{pmatrix}$$

. Como A es inversible sé que sus columnas son l.i.

~~. Supongo que $\exists k \in \mathbb{R}$ t'q' $m_i = k m_j$ para algún $1 \le i < j \le r$~~

$$\cancel{\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_i \\ c_i \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_j \\ c_j \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_i = k a_j \\ c_j = k c_j \end{cases}}$$

~~. $a_i = k a_j$ NO vale p'q' las col de A son l.i. Luego las primeras columnas~~

. Voy a ver que las 1ras r columnas de M son l.i, Supongo que no, es decir existen $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ no todos nulos t'q'

$$\alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_r m_r = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_r \begin{pmatrix} a_r \\ c_r \end{pmatrix} = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r = \emptyset \\ \alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_r c_r = \emptyset \end{cases}$$

Abs! las columnas de A forman un conjunto l.i

. Luego M tiene al menos r col. l.i.
y por lo tanto $rg(M) \geq r$

ii)

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + 0 & B + 0 \\ \underbrace{CA^{-1}A}_{=I} + 0 & CA^{-1}B + D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = M$$

qvq $rg(M) = r \iff D = CA^{-1}B$

$\Leftarrow$) Se que $M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

además las columnas de A forman un conjunto l.i. Supongo que M tiene $rg > r$.

. Sea b_i columna de B t'q $m_i = \begin{pmatrix} b_i \\ 0 \end{pmatrix}$ y b_i es l.i respecto de las columnas de A

$\Rightarrow \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r + \alpha_{r+1} b_i = 0$

$\iff \alpha_1, \dots, \alpha_{r+1} = 0$

. Noto que $a_1, \dots, a_r, b_i \in \mathbb{R}^r$

pero entonces $\langle a_1, \dots, a_r, b_i \rangle$ es una base de $\mathbb{R}^{r+1}$ Abs!

. No se puede formar una base de $\mathbb{R}^m$ con vectores de $\mathbb{R}^n$, con $m > n$.

$\therefore rg(M) = r$ (*)

~~[illegible]~~ (*) Por item (a), noto que

$\begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix}$ es inversible por ser Δ inf con 1s en la diagonal

y entonces $rg(M) = rg\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

$\Rightarrow$) Se que $rg(M) = r$ y por lo tanto

$rg\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix} = r$

. Noto que las tres r columnas de $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$ son l.i entre si.

Por lo tanto debe... ¿?

[redacted]

2) a) qvq $u_i^t = a_i^t - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^t \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$

$\iff a_i^t = u_i^t + \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^t \quad \forall\, 1 \leq i \leq n.$

. Noto que la i-ésima fila de A se puede expresar como:

$$a_i^t = \text{fila}_i(L) \cdot U = \text{fila}_i(L) \cdot \begin{pmatrix} — u_1^t — \\ \vdots \\ — u_n^t — \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{fila}_i(L) \cdot \text{col}_1(U) \\ \vdots \\ \text{fila}_i(L) \cdot \text{col}_n(U) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$= \begin{pmatrix} l_{i1} \cdot u_{11} + l_{i2} \cdot u_{21} + \dots + l_{in} u_{n1} \\ \vdots \\ l_{i1} \cdot u_{1n} + l_{i2} u_{2n} + \dots + l_{in} u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= l_{i1} \cdot u_1^t + l_{i2} u_2^t + \dots + l_{in} u_n^t$$

$$= \sum_{j=1}^{n} l_{ij} u_j^t$$

. Noto que $l_{ii} = 1 \quad \forall\, i = 1, \dots, n$ por enunciado y que $l_{ij} = 0 \quad \forall\, j > i$ p/q L es Δ inferior

$$\therefore \sum_{j=1}^{n} l_{ij} u_j^t = \sum_{j=1}^{i} l_{ij} u_j^t = \underbrace{l_{ii}}_{=1} u_i^t + \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^t$$

$$= u_i^t + \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^t$$

$\therefore a_i^t = u_i^t + \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^t \quad \forall\, i = 1, \dots, n$ y

$u_i^t = a_i^t - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^t \quad \forall\, i = 1, \dots, n$

b) $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_i \|a_i^t\|_1$ Prop no def

_Caso base: $i = 1$

qvq $\|u_1^t\|_1 \leq 2^0 \|A\|_\infty = \|A\|_\infty$

$A = LU \Rightarrow U = L^{-1}A$

; L^{-1} es Δ inf con 1s en la diagonal p'q' L lo es (resultado visto en clase de elim. gaussiana)

$\therefore u_1^t = \text{fila}_1(L^{-1})A = e_1^t A = a_1^t$

$\Rightarrow \|u_1^t\|_1 = \|a_1^t\|_1 \leq \|A\|_\infty$

_Paso inductivo:

HI $\|u_k\|_1 \leq 2^{k-1} \|A\|_\infty$ para $1 \leq k < n$

qvq $\|u_{k+1}\|_1 \leq 2^k \|A\|_\infty$

$u_{k+1}^t = a_{k+1}^t - \sum_{j=1}^{k} l_{kj} u_j^t = a_{k+1}^t - (\overset{=1}{l_{kk}} u_k^t + \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj} u_j^t)$

$\|\sum_{j=1}^{k} l_{k+1\,j} u_j^t\|_1 = \|\sum_{j=1}^{k} l_{k+1\,j} (a_j^t - \sum_{p=1}^{j-1} l_{jk} u_k)$

$\leq \sum_{j=1}^{k} \|l_{k+1\,j} u_j^t\| \leq \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\|l_{k+1\,j}\|_1}_{\leq 1} \underbrace{\|u_j^t\|_1}_{\geq 2^{k-1}\|A\|_\infty} \leq k \cdot 2^{k-1} \|A\|_\infty$

$\leq \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\|u_j^t\|_1}_{\geq 2^{j-1}\|A\|_\infty} \leq \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1} \|A\|_\infty = \|A\|_\infty \cdot \frac{2^{k+1}-1}{2-1}$

[redacted]

$u^t_{k+1} = a^t_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} l_{k+1\,j}\, u^t_j$

Tomo norma 1 a ambos lados:

$\|u^t_{k+1}\|_1 = \|a^t_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} l_{k+1\,j}\, u^t_j\|_1$

$\leq \|a^t_{k+1}\|_1 + \|\sum_{j=1}^{k} l_{k+1\,j}\, u^t_j\|_1$

x prop de norma ✓

; $\|\sum_{j=1}^{k} l_{k+1\,j}\, u^t_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^{k} \|l_{k+1\,j}\, u^t_j\|_1$

$= \sum_{j=1}^{k} \underbrace{|l_{k+1\,j}|}_{\leq 1 \text{ x enunciado}} . \|u^t_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\|u^t_j\|_1}_{\leq 2^{j-1}\|A\|_\infty \text{ x H.I}}$ ✓

$\leq \left(\sum_{j=1}^{k} 2^{j-1}\right) . \|A\|_\infty = (2^{k+1-1} - 1)\|A\|_\infty$

; $\|a^t_{k+1}\|_1 \leq \|A\|_\infty$ x lo visto anteriormente

$\therefore \|u^t_{k+1}\|_1 \leq \|A\|_\infty + (2^{k} - 1)\|A\|_\infty$ ✓

$\|u^t_{k+1}\|_1 \leq (2^{k} - 1 + 1)\|A\|_\infty$

$\|u^t_{k+1}\|_1 \leq 2^{k}\|A\|_\infty$ ✓

Vale el paso inductivo y concluyo que: $\|u_i\|_1 \leq 2^{i-1}\|A\|_\infty \quad \forall\, i=1,\dots,n$ ✓

c) $\|U\|_\infty = \max_i \|u_i^t\|_1$ x def.

Se x item b que $\|u_i^t\|_1 \leq 2^{i-1}\|A\|_\infty$

como $1 \leq i \leq n$ en particular

$2^{i-1}\|A\|_\infty \leq 2^{n-1}\|A\|_\infty$

$\therefore \max_i \|u_i^t\|_1 \leq 2^{n-1}\|A\|_\infty$ y entonces

$\|U\|_\infty \leq 2^{n-1}\|A\|_\infty$

✓

$\frac{15}{21}$ 5/6

[redacted]

3) a) Se que $x^t A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ por ser A sdp.

. En particular considero $x = e_i$:

$\underbrace{e_i^t A e_i}_{a_{ii} > 0} > 0$; $A e_i = col_i(A)$ y
$e_i^t \, col_i(A) = a_{ii}$

$\therefore a_{ii} > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ p.q. el razonamiento vale para cualquier canónico.

b) Sea la siguiente descomposición en bloques de la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} A^k_{11} & A^k_{12} \\ A^k_{21} & A^k_{22} \end{pmatrix}, \quad A^k_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}, \quad A^k_{12} \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}, \quad A^k_{21} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times k}, \quad A^k_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$$

. Con $1 \leq k < n$, entonces A^k_{11} es la k-ésima submatriz principal de A.

. Como A es sdp, considero $A = LL^t$ su descomposición de Cholesky, descompongo LL^t en bloques según la misma estructura que antes:

$$\begin{pmatrix} A^k_{11} & A^k_{12} \\ A^k_{21} & A^k_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^t_{11} & L^t_{21} \\ 0 & L^t_{22} \end{pmatrix}$$

. Como L_{11} es submatriz ppal de una triangular inferior con 1s en la diagonal, también es triangular inf. con 1s en la diagonal.

No tiene necesariamente 1s. Es Cholesky, no LU

Luego, para que la igualdad se cumpla debe ser:

$- A_{11}^{k} = L_{11} \cdot L_{11}^{t} + 0 \cdot 0 = L_{11} L_{11}^{t}$

Por lo tanto $L_{11} L_{11}^{t}$ es una descomposición Cholesky de A_{11}^{k} y entonces A_{11}^{k} es sdp (se que A sdp $\Leftrightarrow$ tiene fact. Cholesky x resultado visto en clase)

Finalmente, el razonamiento vale para cualquier submatriz ppal (y A es sdp por hipótesis ~~enunciado~~), por lo tanto, toda sub. ppal. de una matriz sdp es sdp. ✓

c) Se por resultado de la guía de SDP (2), que si A es sdp vale la desigualdad (es la 3) $|x^t A y| \leq \sqrt{x^t A x}\sqrt{y^t A y}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Noto que $a_{ij} = e_i^t A e_j$

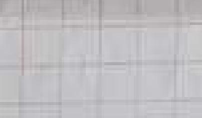
$\Rightarrow |a_{ij}| = |e_i^t A e_j| \leq \sqrt{e_i^t A e_i}\sqrt{e_j^t A e_j}$

$\Leftrightarrow (|a_{ij}|)^2 \leq \left(\sqrt{a_{ii}}\sqrt{a_{jj}}\right)^2$

(Elevar al cuadrado mantiene la desigualdad p/q la norma* y la raíz cuadrada son monotonas crecientes)

$\Leftrightarrow \left[a_{ij}^2 \leq a_{ii} \cdot a_{jj}\right]$ ✓

* Si con norma te referis al val abs. No, es monotona,



Pero, sí la raíz es monotona.

La respuesta es que elevar al cuadrado mantiene la desigualdad porque ambos terminos son positivos y la cuadratica es monotona ahí.

4) a) qvq $f(A)^t f(A) = I$:

$$= \left[(I-A)(I+A)^{-1}\right]^t (I-A)(I+A)^{-1}$$

$$= \left((I+A)^{-1}\right)^t (I-A)^t (I-A)(I+A)^{-1}$$

$$\cdot\ \left((I+A)^{-1}\right)^t = \left((I+A)^t\right)^{-1} = (I+\underbrace{A^t}_{=-A})^{-1} = (I-A)^{-1}$$

$$\cdot\ (I-A)^t = (I-A^t) = (I+A)$$

$$\therefore f(A)^t f(A) = (I-A)^{-1}(I+A)(I-A)(I+A)^{-1}$$

. Voy a ver que $I-A$ e $I+A$ conmutan:

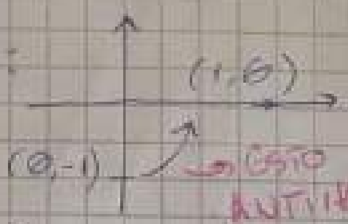
$$\left.\begin{array}{l}(I+A)(I-A) = I - A + A - A^2 = I - A^2 \\ (I-A)(I+A) = I + A - A - A^2 = I - A^2\end{array}\right\} =$$

$$\therefore f(A)^t f(A) = \underbrace{(I-A)^{-1}(I-A)}_{=I}\underbrace{(I+A)(I+A)^{-1}}_{=I} = I$$

. Concluyo que $f(A)$ es ortogonal.

c) Las dos matrices son las que rotan en sentido horario y antihorario respectivamente

G_1:



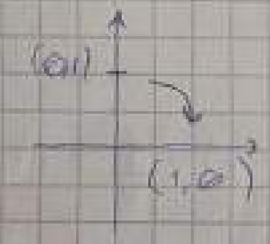
esto es ANTIHORARIO!

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\operatorname{sen}\theta = 1 \\ \cos\theta = 0 \end{cases} \quad \therefore G_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

G_2:



$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\theta = 1 \\ \cos\theta = 0 \end{cases} \quad \therefore G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

. Como G_1 y G_2 son ortogonales, sus matrices antisimétricas asociadas son $f(G_1)$ y $f(G_2)$ respectivamente.

$$- f(G_1) = (I - G_1)(I + G_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = G_2$$

$$- f(G_2) = (I - G_2)(I + G_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ +1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & +1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = G_1$$

. Noto que $f(G_1) = G_2$ y $f(G_2) = G_1$